# Istituzioni di Matematiche
## CdL Scienze Biologiche

### Matrici

Una matrice è un simbolo che si ottiene disponendo dei numeri reali su un certo numero di righe $n$ ed un certo numero di colonne $m$

Es $n = 3$ $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 2 \text{ matrice}$$

Molte volte è conveniente descrivere una matrice in forma compatta

$$A = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$$

$i$ = numero di riga
$j$ = numero di colonna

Es
$$A = (a_{ij})_{i=1}^{3} {}_{j=1}^{2}$$

In questo caso la matrice descrive la seguente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Se il numero di righe $= n$ coincide col numero di colonne $= n$ (ossia matrice $n \times n$)

la matrice viene detta quadrata di ordine $n$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \quad (\text{quadrata di ordine } 2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{quadrata di ordine } 3$$

Sia $M$ una matrice quadrata di ordine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$M = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{n}$$

un elemento $a_{ij}$ di $M$ si dice essere di <u>ordine pari</u> se $i+j$ è pari

Altrimenti $a_{ij}$ si dice di <u>ordine</u> <u>dispari</u>

Es $a_{12}$ è ordine dispari perché $1+2=3$

**Def** (Minore complementare)

Sia $M$ una matrice quadrata di ordine $n$

si definisce minore complementare associato all'elemento $a_{ij}$

la nuova matrice che si ottiene da $M$ sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ ordine $n$

Il minore complementare associato a $a_{12}$ è

$$M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

minore complementare associato a $a_{23} = 7$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota che ogni minore complementare di una una matrice quadrata di ordine $n$ è anch'essa matrice quadrata ma di ordine $n-1$

**Def** Sia $M$ una matrice quadrata di ordine 1

$$M = (a_{11})$$

definiamo determinante di $M$

$$\det M = a_{11}$$

Supponiamo $M$ sia matrice quadrata di ordine 2

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si definisce il determinante di $M$ come

$$\det M = a_{11} \cdot a$$

$$\boxed{\det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Se, infine, la matrice $M$ è quadrata di ordine $n$ $(n \geq 3)$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\forall\, i, j \in \{1 \dots n\}$ consideriamo

$$\boxed{A_{ij} \overset{def}{=} \operatorname{ord}(a_{ij}) \cdot a_{ij} \cdot \det M_{ij}}$$

dove $\operatorname{ord}(a_{ij}) = \begin{cases} + & \text{se } a_{ij} \text{ è di ordine pari} \\ - & \text{se } a_{ij} \text{ è di ordine dispari} \end{cases}$

mentre $\det M_{ij}$ è determinante di una matrice di ordine $n-1$ (utilizzando più volte questa definizione ci riconduciamo a minori di ordine 2)

Si definisce determinante di $M$

come la somma degli $A_{ij}$ <u>associati agli elementi</u> o di una <u>stessa riga</u> o di una <u>stessa colonna</u>

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 3$$

Esempio

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scelgo la prima riga

$$A_{11} = \mathrm{ord}(a_{11}) \cdot a_{11} \cdot \det M_{11} =$$

$$= +5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot (0 \cdot 3 - 2 \cdot 2)$$

$$= 5 \cdot (-4) = -20$$

$$A_{12} = \mathrm{ord}(a_{12}) \cdot a_{12} \cdot \det M_{12}$$

$$= -(\cdot 1) \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 1)$$

$$= -7$$

$$A_{13} = 0$$

$$\Rightarrow \det M = A_{11} + A_{12} + A_{13} = -20 - 7 + 0$$

$$= -27$$

Es...

**Esempio**

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Scelgo 2° colonna

$$A_{12} = 0$$

$$A_{22} = \text{ord}(a_{22}) \cdot a_{22} \cdot \det M_{22} =$$

$$= +3 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 30 = 90$$

$$A_{32} = \text{ord}(a_{32}) \cdot a_{32} \cdot \det M_{32} =$$

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (6 \cdot 1 - 4 \cdot 2)$$

$$= -2(-2) = 4$$

$$\Rightarrow \det M = 94$$

**Osservazione** Il determinante di una matrice non dipende dalla scelta della riga/colonna

**Esempio**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Caso 1 scelgo 3 riga

$A_{31} = 0$ $A_{32} = 0$ $A_{34} = 0$

$A_{33} = \text{ord}(a_{33}) \cdot a_{33} \cdot \det M_{33} =$

$$= +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \cancel{B_{13}}^{\,0} + \cancel{B_{23}}^{\,0} + B_{33} \right) =$$

$$= +(-1) \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = -3$$

$$\Rightarrow \quad \det M = -3$$

Rifaccio il det M scegliendo 4ª colonna

$$\det M = \left( \cancel{A_{14}}^{\,0} + \cancel{A_{24}}^{\,0} + \cancel{A_{34}}^{\,0} + A_{44} \right) =$$

$$= \text{ord}(a_{44}) \cdot a_{44} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= +(-1) \cdot \left[ +(1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = -3$$

Più in generale la formula per il calcolo del determinante è la seguente

$$\boxed{\det M := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det M_{ij}}$$

(fissando la riga i-esima)

<u>Operazioni</u> tra <u>matrici</u>

(1) se $b \in \mathbb{R}$ e $M$ è matrice $n \times m$

$$M = (a_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m}$$

si definisce $b \cdot M$ come la matrice $n \times m$ definita

$$b \cdot M = (b \cdot a_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m}$$

(2) Siano $A$ e $B$ due matrici $n \times m$
(stesso numero di righe e stesso numero di colonne)

$$A = (a_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m} \qquad B = (b_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m}$$

Definiamo la matrice $A+B$ (sempre $n \times m$) come

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} - - & - & — & - - \\ a_{n1}+b_{n1} & - - & — & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

Oss $\quad A+B = B+A$ (proprietà commutativa della somma)

(3) Prodotto tra matrici

Sia $A$ una matrice $n \times m$ $\quad A = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$

$B$ una matrice $m \times k$ $\quad B = (b_{ij})_{i=1}^{m} {}_{j=1}^{k}$

(numero colonne di A deve coincidere con il numero di righe di B)

si definisce matrice prodotto

$$A \cdot B = (c_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{k} \qquad (n \times k)$$

dove

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj}$$

prodotto righe per colonne

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0$$

$$= 2$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-5)$$

$$= -1$$

<u>Osserviamo</u> Se avessimo dato come definizione (più ovvia) di matrice prodotto

$$A \cdot B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$$

Si avrebbe che $A \cdot B = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 - & 0 \end{pmatrix}$

con $A, B \neq 0$ (non si ha più la legge di annullamento del prodotto)

Mentre con la definizione righe per colonne vale

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \text{ oppure } B = 0$$

<u>Osservazione</u>

Osservazione

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

non abbiamo la proprietà commutativa
per il prodotto

Esercizio dare un esempio di matrici A e B :

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Matrice identità (è matrice quadrata di ordine n)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & & & \\ 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{n}$$ dove

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Def (Matrice trasposta)

sia A una matrice $n \times m$

si definisce $A^T$ (matrice trasposta di A)

come la matrice $m \times n$ dove scambiamo righe con colonne in A :

$$A = (a_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{j=1}^{m} {}_{i=1}^{n}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proprietà

1. (Formula di Binet)

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

2. $$\det A = \det A^T$$

3. $$\det I = 1$$

DEF (Matrice inversa)

Sia A una matrice di ordine n.

Diciamo che A è invertibile se

esiste B (matrice di ordine n) tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = I \quad \text{(matrice identità)}$$

Oss se B esiste allora essa è unica!

In tal caso tale matrice B viene denotata come $A^{-1}$

detta matrice inversa di A

<u>Teorema</u>

A è invertibile $\iff$ $\det A \neq 0$

<u>Problema</u> come trovare $A^{-1}$ ?

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad ?$$

Se $\det A \neq 0$ allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ c_{n1} & & c_{nn} \end{pmatrix}^T$$

dove $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} = \text{ord}(a_{ij}) \det M_{ij}$

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^T = \circledast$$

$c_{11} = + \det M_{11} = +4$ $\qquad c_{21} = -2$

$c_{12} = - \det M_{12} = -3$ $\qquad c_{22} = 1$

$$\otimes = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{2} & +\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{-2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Verificare che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Rango di una matrice</u>

Sia $A$ una matrice $p \times q$

si chiama <u>sottomatrice</u> di $A$ ogni matrice che si ottiene da $A$ sopprimendo una o più righe di $A$ e/o una o più colonne di $A$

Caso particolare: ogni minore complementare è sottomatrice

<u>Def</u> Data $A$ matrice $p \times q$

si chiama <u>minore</u> di $A$ ogni sottomatrice quadrata di $A$

<u>Def</u> (Rango di una matrice)

Sia $A$ una matrice $p \times q$

Diciamo che il rango di $A$ è $n$ se

(1) esiste almeno un minore di $A$ di ordine $n$ con determinante $\neq 0$

(2) Tutti i minori di $A$ di ordine $n+1$ hanno determinanti $= 0$

Nota Se $A$ è matrice quadrata di ordine $n$

Allora

$$\text{rango } A = n \iff \det A \neq 0$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3$$

minori $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$1^e$ colonna $\qquad$ $2^e$ colonna $\qquad$ $3^e$ colonna

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 8 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{rango } A \neq 2$$

ma se considero $(1)$ sottomatrice $1\times 1$ di $A$

$\Rightarrow \det(1) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ rango $A = 1$

Esercizio

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{5} \end{cases}$$

$a_1 = 0 \qquad a_2 = \dfrac{0^2+4}{5} = \dfrac{4}{5}, \dots$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{5} \geq \frac{0+4}{5} = \frac{4}{5} > 0$$

$\Rightarrow (a)_n$ è successione di numeri positivi

$f(x) = \dfrac{x^2+4}{5}$ $\qquad \boxed{a_{n+1} = f(a_n)}$

Studio $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot x = \frac{2}{5}x > 0 \qquad \forall x > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ cresce in $[0, +\infty[$

$a_1 = 0 < \frac{4}{5} = a_2$

$a_1 < a_2$

$a_2 = f(a_1) < f(a_2) = a_3$

$\dots\dots$

$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Supponiamo che $l \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad l = f(l) = \frac{l^2+4}{5}.$$

$$\Leftrightarrow \quad 5l = l^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad l^2 - 5l + 4 = 0$$

$\Delta = 25 - 16 = 3^2$

$$l = \begin{cases} \frac{5-3}{2} = 1 \\ \frac{5+3}{2} = 4 \end{cases}$$

Se $l = 4 \Rightarrow a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_1 = 0 \leq 4$ OK

Suppongo che $a_n \leq 4$ e provo che $a_{n+1} \leq 4$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{5} \leq \frac{4^2 + 4}{5} = 4 \qquad \text{OK}$$

$\Rightarrow \quad l=4$ è maggioranti

Caso $l=1$ $\qquad a_1 = 0 \leq 1$ OK

Suppongo che $a_n \leq 1$ e provo che $a_{n+1} \leq 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{5} \leq \frac{1^2+4}{5} = 1$$

$\Rightarrow \quad l=1$ è maggiorante per $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

Esercizio

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{4}{4-a_n} \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{4}{4-x}$ ; CE $x \neq 4$

$$f'(x) = 4 \cdot \left( - \frac{-1}{(4-x)^2} \right) = \frac{4}{(4-x)^2} > 0$$

Sempre

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce

$a_1 = 0 \qquad a_2 = \dfrac{4}{4-0} = 1$

$a_1 < a_2 \quad \dots \quad a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = l = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \searrow \in\mathbb{R} \end{cases}$$

Supponiamo $l\in\mathbb{R} \Rightarrow l = f(l)$

$$l = \frac{4}{4-l}$$

$$l(4-l) = 4$$

$$-l^2 + 4l = 4$$

$$l^2 - 4l + 4 = 0 \iff (l-2)^2 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4\cdot 4 = 0 \qquad \Updownarrow \qquad l = 2$$

Verifico se $l$ è maggiorante per $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a_1 = 0 \leq 2$ OK

Suppongo $a_n \leq 2$ e provo che $a_{n+1} \leq 2$

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n}$$

Nota $a_n \le 2 \Rightarrow 4 - a_n \ge 4 - 2 = 2$

$$4 - a_n \ge 2$$

passo ai reciproci: $\frac{1}{4-a_n} \le \frac{1}{2}$

moltiplico per 4 $\frac{4}{4-a_n} \le \frac{4}{2} = 2$

$a_{n+1}$

$\Rightarrow a_{n+1} \le 2$ OK $\Rightarrow l=2$ è effett. un maggiorante

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$$

In particolare $\Rightarrow a_n \neq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e quindi la succ. è ben definita

Esercizio

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x - 3\sin x + 2} \cdot \cos x \, dx \overset{1^\circ \text{sost}}{=}$$

Uso $z = \sin x \Rightarrow dz = \cos x \, dx$

$$= \int \frac{z}{z^2-3z+2}\, dz$$

Passo 2 dec. denominatore

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 = 1 \qquad z_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\boxed{\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}}$$

$$= \frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{(A+B)z + (-2A-B)}{(z-1)(z-2)}$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \rightarrow B = 1 - A \\ -2A - B = 0 \rightarrow -2A - \underbrace{(1-A)}_{B} = 0 \end{cases}$$

$$-A - 1 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$B = 2$$

Passo 4 sostituisco le costanti dal passo 3

$$\int \frac{z}{(z-1)(z-2)}\, dz = -\int \frac{1}{z-1}\, dz + 2 \int \frac{1}{z-2}\, dz$$

$$= -\lg|z-1| + 2\lg|z-2| + \text{cost}$$

$(z = \sin x)$ $$= -\lg|\sin x - 1| + 2\lg|\sin x - 2| + \underline{\underline{\text{cost}}}$$